Progress in Science Education, 2017
ISSN 2405-6057
DOI.10.25321/prise.2018.615

FOSTERING SEMI-QUANTITATIVE REASONING IN THE CLASSROOM WITH WORKED EXAMPLES AS EDUCATIONAL SCAFFOLD

DEVELOPPMENT DU RAISONNEMENT SEMI-QUANTITATIF (RSQ) EN CLASSE AVEC COMME OUTIL PEDAGOGIQUE LE « WORKED EXAMPLE » (WE)

Cedric Loretan[a,c], Andreas Müller[a,b], Laura Weiss[a]

[a] Université de Genève, Institut Universitaire de Formation des Enseignants (IUFE), Boulevard du Pont d'Arve 40, 1211 Genève, Switzerland
[b] Université de Genève, Faculté des Sciences / Section Physique, Quai Ernest-Ansermet 24, 1205 Genève, Switzerland
[c] Etablissement Secondaire Oron-Palézieux, Route de Lausanne 10, 1610 Oron-la-Ville, Switzerland

[*]Address all correspondence to Cedric Loretan, Institut Universitaire de Formation des Enseignants (IUFE), Boulevard du Pont d'Arve 40, 1211 Genève, Switzerland. cedric.loretan@unige.ch

ABSTRACT
SQR is seeking for solutions to quantitative problems, which are allowed to be imprecise, but have the correct order of magnitude (expressed as a power of 10; e.g. age of the universe ~10^{10}yrs). It can help to get estimates, when some data cannot be precisely known or hard to obtain by precise calculations, or to check the plausibility of a claim or result, etc. For these reasons, SQR is very important in science ("Fermi questions") and it can also be seen as an important component of general and scientific literacy, e.g. when checking the plausibility of mass media news and web sources.In the present contribution, we introduce a type of learning activities for SQR for secondary level I (14-15 years) based on Worked Examples as educational scaffold. Moreover, we present and discuss results of an exploratory qualitative study, based on statements made by pupils during the learning activities.
In general, pupils are surprised by the effectiveness of dealing with problems using SQR approach; they realize that it is possible to get an useful approximate answer without precise calculation and without using the pocket calculator.

Introduction : Le RSQ est un type de raisonnement permettant de s'engager dans une attitude critique et réfléchie vis-à-vis d'affirmations et de résultats quantitatifs liés à des questions et des problèmes très variés, émanant souvent de la vie quotidienne. L'élément-clé du RSQ est de rechercher par un calcul simple une solution approximative. En sciences ce type d'approche ("questions de Fermi") a une place importante (Weinstein & Adam, 2008) ; dans un contexte éducatif, les tâches de type RSQ ont le potentiel pour une double responsabilisation des élèves : premièrement l'utilisation simplifiée de l'outil puissant que sont les mathématiques leur permet d'en maîtriser de nombreuses difficultés ; deuxièmement, la découverte par eux mêmes de résultats intéressants et parfois surprenants, qui met en évidence l'efficacité du raisonnement. Cela contribue en particulier à aller au-delà de l'attitude fréquente d'une « croyance aveugle » dans les résultats obtenus avec la calculatrice ou dans des information trouvées dans les media ou à d'autres sources. Cette façon de faire est une des composantes importantes de « l'alphabétisation scientifique et numérique » (voir HARMOS (CDIP, 2011) ou « Projet 2061: Science pour tous les Américains » (AAAS, 1989)).
Cependant, de sérieux obstacles empêchent le développement du RSQ à l'école. Un premier groupe d'obstacles est d'ordre conceptuel : la difficulté à comprendre l'idée d'approximation et d'ordre de grandeur, une représentation insuffisante de grands et de petits nombres (Delgado et al., 2007 ; Delgado, 2009 ; Tretter, et al., 2006 ; Hawking, 1978). Un deuxième groupe traite des compétences techniques telles que les changements d'unité, l'utilisation des puissances de 10, la proportionnalité, etc. Le troisième type est la combinaison des obstacles conceptuels et techniques, provoquant une charge cognitive élevée (Van Merriënboer & Sweller, 2005; Sweller, Ayres et Kalyuga, 2011). Apprendre le RSQ est complexe et l'enseignement doit donc prendre en compte ces obstacles. Pour soutenir cet apprentissage, tout en évitant la surcharge cognitive, une approche prometteuse et bien étudiée est le « Worked Example » (WE) (Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000 ; Gauthier et Jobin, 2009 ; voir aussi Hattie, 2009 pour une synthèse méta-analytique). Elle consiste à étudier des tâches basées sur une solution modèle, qui est la démonstration étape par étape de la manière de les effectuer (Catley & Novick, 2009). L'objectif du WE est donc de faire comprendre aux apprenants le pourquoi et le comment d'une résolution experte.

But : Dans cette contribution, nous étudions de façon qualitative la faisabilité de la mise en pratique de l'apprentissage du RSQ à l'aide de WE.

Echantillon : Le dispositif a été testé dans une classe de 11ème année HARMOS du secondaire I (fin du premier cycle du secondaire), composée de 20 élèves de 14-15 ans qui ont obtenu de bons résultats dans les branches scientifiques et choisi une filière plus exigeante en mathématiques et en physique depuis la 9ème année.

Mise en place et méthode : Le thème proposé pour cette séquence est la poussée d'Archimède. Différentes compétences de nature RSQ étaient visées, à savoir l'estimation de dimensions à partir d'images, les techniques de calcul avec des manipulations de nombres sans l'usage de la calculatrice, l'arrondi des nombres et la consistance des approximations qui conservent l'ordre de grandeur.
Le dispositif consiste en une séquence d'enseignement, suivie d'un test de compétences de type RSQ. Celle-ci est découpée en trois étapes, respectivement, la découverte du RSQ dans des WE traitant de la force d'Archimède, puis la résolution d'exercices simples très similaires (transfert proche) et finalement la résolution de problèmes plus complexes (transfert lointain).
La méthode d'analyse choisie est qualitative et consiste à analyser les remarques faites par les élèves lors des trois étapes.

Résultats : Pour la première étape, les élèves sont surpris par l'efficacité du RSQ et le non besoin systématique de l'usage de la calculatrice pour trouver une solution (utilisation d'approximations, telle qu'une valeur de 3 pour Pi, simplification des formes, etc.). Pour la deuxième étape, on constate que le fait d'avoir à disposition sur papier le WE présentant le raisonnement expert de résolution peut rendre le transfert proche possible. Dans la troisième étape, où les élèves sont « parachutés » en terre inconnue avec un problème de transfert lointain, ils ont gagné en confiance pour mettre en œuvre les outils développés précédemment.

Conclusion : Au vu de ce test de faisabilité et des résultats qualitatifs obtenus, notre perspective pour l'avenir est de joindre une dimension quantitative à cette étude. Nos premières expérimentations dans ce sens semblent confirmer les effets positifs du WE pour l'apprentissage du RSQ (auteur1, auteur2, auteur3 & Roch, 2017). La confirmation et compréhension stabilisée de ces résultats pourront déboucher sur l'amélioration de la pratique d'enseignement dans ce domaine que nous considérons comme important.

Mots clés : Numératie, ordre de grandeur, raisonnement semi-quantitatif, worked example

Received: Month Year. Accepted: Month Year.

1 INTRODUCTION

De tout temps les mathématiques ont été et sont un outil essentiel pour le travail scientifique, depuis son essor historique avec Galilée jusqu'aux temps actuels (Lévy-Leblond : « On ne peut pas penser la physique sans passer par les mathématiques » (Balibar, 2012, p.63) ; Feynman : […] it is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature in a way that people can feel, without their having some deep understanding of mathematics (Feynman, 1985, pp. 39–40)). Véritable lien fondateur pour les sciences modernes (v. par exemple Wigner, 1960). Il existe cependant peu de travaux de recherche et de mise en pratique sur ce thème.
Une façon de développer ce lien est le raisonnement « par ordre de grandeur » ou raisonnement semi-quantitatif (RSQ) dont la paternité est attribuée à E. Fermi (Von Baeyer, 2001). Ce sont des problèmes demandant l'utilisation de données approchées à une puissance de dix près avec prise en compte de la plausibilité des approximations et des résultats obtenus. Le but est de développer le sens critique à l'égard des données et des résultats. Plusieurs publications proposent des problèmes de Fermi (Weinstein & Adam, 2008; Swartz, 2003) et la revue « The Physics Teacher » y consacre une rubrique hebdomadaire gérée par Weinstein depuis 10 ans.
Le RSQ présente aussi un intérêt didactique : avec des outils mathématiques simples, on peut arriver à des conclusions scientifiques non évidentes et parfois surprenantes.
Dans cette contribution, nous étudions de façon qualitative la faisabilité de l'apprentissage du RSQ. Pour ce faire, nous nous appuyons sur un outil didactique, le Worked Example (WE). Avant de présenter les résultats nous développons les bases théoriques du RSQ et du WE.

2 CADRE THÉORIQUE

La numératie : La numératie joue le même rôle pour les mathématiques que la littératie pour les langues. Kaiser (2009) la définit comme les : « connaissances et compétences nécessaires pour affronter de façon adéquate les aspects mathématiques des problèmes de la vie quotidienne ». C'est exactement dans cet esprit que HARMOS (accord intercantonal suisse sur l'harmonisation de l'enseignement) énonce:
Bon nombre d'adultes ont un rapport aux mathématiques ambivalent. D'un côté, nul ne conteste la valeur des mathématiques. […] *De l'autre côté, pour de nombreux adultes, même parmi les plus cultivés, les mathématiques incarnent l'abstraction et la difficulté. Déjouer cette ambivalence, ou du moins l'atténuer, est l'une des missions de l'enseignement des mathématiques. Sans formation de base en mathématiques, une personne ne peut avoir qu'une appréhension imparfaite du monde moderne, où se mêlent information, communication et*

technique, et réduit ses chances de prendre une part active dans la vie de la société (CDIP, 2011)
La comparaison entre le raisonnement quantitatif, base de la numératie et les mathématiques traditionnelles (Steen, 2004) met en évidence que le premier est d'ordre pratique alors que les mathématiques sont par essence abstraites. Le raisonnement quantitatif est ancré dans la vie quotidienne. En outre en offrant la possibilité de poser un regard critique face aux données publiées il est un outil du citoyen responsable. Ses objets principaux sont des données numériques au contraire des mathématiques dont les objets d'étude sont des concepts idéaux.

Une définition du RSQ : Nous définissons ici le raisonnement semi-quantitatif comme un type de raisonnement qui se base sur l'ordre de grandeur des données numériques (puissance de 10 la plus proche de leur valeur). En effet, une grandeur physique se caractérise par son unité et son ordre de grandeur. Il faut y ajouter le « sens des nombres », à savoir leur importance relativement à une situation donnée. Enfin, le RSQ implique un regard critique par rapport à l'information, en particulier celle diffusée par les médias : une donnée chiffrée n'est pas forcément juste !

Les compétences numériques du RSQ : Delgado *et al.* (2007) et Delgado (2009) distinguent quatre compétences concernant la notion d'ordre de grandeur et d'échelle :
I) ***Ordonner*** des grandeurs.
II) ***Grouper*** des grandeurs proches.
III) ***Représenter*** des grandeurs, à savoir exprimer la taille d'un objet en fonction d'un autre.
IV) ***Estimer*** une grandeur.
Les trois premières compétences permettent d'appréhender la notion d'échelle, porte d'entrée vers le calcul d'estimation, alors que la quatrième initie déjà le travail d'estimation, fondement du RSQ. Selon Paulos (1988), il est essentiel de disposer de repères, d'avoir à l'esprit une collection d'objets correspondant à chaque puissance de dix dans une certaine gamme. On retrouve cette idée de repères ou de références chez Crites (1992), Siegel *et al.* (1982) et Brown et Siegler (1993).

Les plans d'études et le RSQ : Le RSQ est-il présent dans les plans d'études ? On trouve des mentions de compétences de type RSQ au sein de curriculums institutionnels suisses (sur le plan romand et fédéral) et internationaux. Le tableau ci-dessous, adapté du programme de l'option spécifique vaudoise « Mathématiques et Physique » (CIIP/DFJC, 2012) du plan d'étude romand (PER), présente différents exemples de compétences étroitement liées au RSQ.

Tab. 1. Compétences liées au RSQ (CIIP/DFJC, 2012).

Domaines	**Exemples**
Recherche, expérimentation et rédaction	**Acceptation ou refus d'un résultat par estimation de l'ordre de grandeur ou confrontation au réel**
Nombres	**Sensibilité aux nombres**
Astronomie	**Effectuer des opérations avec la notation scientifique, calculs avec des grands nombres, problèmes de proportionnalités, comparaisons de grandeurs impliquées, la notion d'échelles, conversions d'unités et connaissances de: vitesse de la lumière, année lumière, unité astronomique**

Sur le plan suisse, les standards HARMOS en sciences (CDIP11b) mentionnent ces notions dans des items particuliers et dans les compétences de base semblables à celles de Delgado *et al.* (2007) (tableau 2).

Tab. 2. Comparaison des compétences (Delgado *et al*, 2007) ; Delgado, 2009 ; CDIP11b)

Delgado *et al.* (2007) ; Delgado (2009)	CDIP11b
I) ordonner II) grouper	réunir, classer et comparer
III) représenter	exposer et présenter
IV) estimer	estimer, justifier, argumenter

Au niveau international, les concepts de RSQ apparaissent dans les projets « Adult Literacy and Life Skills Survey » (OCDE, 2011), « Project 2016: Science for all Americans » (AAAS, 1990), « Statement of Beliefs » (NCTM, USA). Ce dernier affirme: « *Computational skills and number concepts are essential components of the mathematics curriculum, and a knowledge of estimation and mental computation are more important than ever* ».
Toutefois, ces prescriptions ne semblent pas avoir un grand effet sur l'apprentissage des élèves. L'estimation était un domaine de compétences traité superficiellement dans les programmes de mathématiques des années quatre-vingt et insuffisant pour construire des compétences (Reys, Rybolt, Bestgen & Wyatt,1982; Carpenter, Coburn, Reys, & Wilson, 1976). L'exemple ci-dessous (Reys et al., 1982) illustre la faible capacité des élèves en matière d'estimation : de nombreux élèves tentent d'opérer directement sur les nombres apparents, sans souci de la vraisemblance de leur estimation.

Question : estimer et cocher la bonne réponse du calcul suivant 12/13 + 7/8 = ?
Résultats: le tableau ci-dessous présente les différentes réponses, exprimées en pourcentage pour deux classes d'âges.

Réponses	**13 ans**	**17 ans**
1	7%	8%
2	24%	37%
19	28%	21%
21	27%	15%
Je ne sais pas	14%	18%

Plus de deux décennies plus tard, Siegler et Booth (2005) et Jones *et al.* (2012) ont montré empiriquement que les élèves, comme les adultes, sont toujours de pauvres estimateurs. Le développement de la capacité d'estimation reste donc un obstacle didactique actuel important.

Les obstacles au RSQ : En plus de l'obstacle évoqué ci-dessus les trois principaux obstacles au RSQ sont :
– la difficulté conceptuelle à se représenter les échelles de grandeur et la perception des grands et petits nombres (Tretter, *et al.*, 2006). Jones *et al.* (2007) constatent que les élèves a) éprouvent de la difficulté avec des dimensions se situant en dehors de l'échelle humaine et b) comprennent mieux l'échelle relative que l'absolue.

– les compétences techniques (changements d'unités, opérations avec des puissances de 10) (voir annexe D).
– la surcharge cognitive générée par la combinaison des deux précédents obstacles (van Merriënboer & Sweller, 2005; Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011).

Le RSQ et l'apprentissage des sciences : Les obstacles discutés précédemment posent de sérieux problèmes pour l'apprentissage des sciences. Hawkins (1978) par exemple considère que la méconnaissance des notions d'échelle et d'ordre de grandeur compte parmi « les barrières critiques » à une compréhension profonde en sciences. Des recherches sur les compétences concernant les échelles spatiales (Jones *et al.*, 2008) et le « temps profond » (Trend, 2009; Catley & Novick, 2009 ; Cheek, 2010; Delgado, 2013) témoignent de l'importance de cette notion. Pour favoriser ces compétences, des moyens d'enseignement et de vulgarisation ont été développés comme le film *Les Puissances de 10* (Morrison & Morrison, 1994).
Malheureusement, on observe que l'apprentissage de ces compétences trouve peu de place dans les activités des élèves : il existe peu de séquences d'enseignement concrètes sur ce thème. Par conséquent Les élèves ont des difficultés avec des problèmes sans réponse exacte ou pour lesquels ils ne disposent pas d'un algorithme amenant à une solution indiscutable. Le sens des nombres est très faible. L'objet de cet article est de rendre compte d'un dispositif didactique propre à construire et développer le RSQ chez les élèves.

Le Worked Example : Une des approches parmi les plus efficaces pour étayer un apprentissage complexe face à la surcharge cognitive est le « Worked Example » (WE) (Atkinson, Derry, Renkl & Wortham, 2000; Hattie, 2009) ou « exemples ciblés » dans la littérature francophone (Gauthier & Jobin, 2009).

Le concept du WE : Le WE peut être défini comme une démonstration de la manière de résoudre un problème en justifiant les différentes étapes (Catley & Novick, 2009; Clark *et al.*, 2006). Son objectif est de fournir des modèles de résolution experte à étudier et imiter (Atkinson, 2000). Le WE est un apprentissage actif, par lequel l'apprenant s'approprie le comment (stratégies) et le pourquoi (principes) d'approches habiles, souvent implicites chez les experts (Renkl *et al.*, 2002; Van Gog et al., 2004). L'ajout d'explications orientées vers le processus permet d'améliorer la performance de transfert, spécialement dans le cas de compétences cognitives complexes impliquant des chemins de résolution multiples. D'un point de vue cognitif, cela permet l'automatisation des schémas de résolution dans la mémoire à long terme (Sweller, Van Merrienboer & Paas, 1998).
L'apprentissage cognitif (Collins, le Brun & Newman, 1989) est basé sur trois phases principales (Docktor & Mestre, 2014) : guider (to scaffold), exercer (exercices guidés) et abandonner progressivement le guidage pour permettre aux apprenants de résoudre complètement des problèmes.

Effets du WE : Gauthier et Jobin (2009) listent les bénéfices des WE, qui contribuent à accroître la confiance en soi : comprendre le principe de base des démarches de résolution ; donner du sens aux procédures ; identifier les similarités et les différences entre plusieurs exemples ; anticiper la prochaine étape de résolution, puis confirmer sa prédiction en se référant à l'exemple ciblé qui a été fourni.
L'efficacité des WE a été établie dans maintes études, en particulier celle liée à la réduction de la charge cognitive (Sweller, 2006) avec une taille d'effet importante allant de $d = 0.62$ dans l'enseignement secondaire à $d = 0.73$ au début de l'université (Crissman, 2006). Des méta-analyses donnent une valeur de $d = 0.55$ pour l'apprentissage sans distinction de discipline, et $d = 0.7$ en sciences (Crissman, 2006 ; Hattie, 2009).

Pourquoi utiliser le WE pour former les élèves au RSQ ? Avec le RSQ, les élèves sont facilement en surcharge cognitive car ils doivent non seulement penser à comment résoudre le problème mais aussi aux données à choisir, à estimer et à arrondir : ce qui pour l'expert est une simplification est pour les élèves, habitués à calculer avec des nombres exacts donnés dans l'énoncé, une complication.
Convenant particulièrement pour des domaines bien structurés tels que les mathématiques et la physique (Reimann,1997 ; Van Lehn,1996), le WE comme dispositif didactique visant l'apprentissage de la résolution de problèmes par l'imitation raisonnée de procédures serait l'outil adapté à l'apprentissage du RSQ.

3 MATÉRIEL ET METHODE

Le dispositif a été testé dans une classe de 11ème année HARMOS du secondaire I, composée de 20 élèves de 14-15 ans qui ont choisi la filière mathématiques et physique depuis la 9ème année. Le thème proposé pour cette séquence était la poussée d'Archimède. Différentes compétences de nature RSQ étaient visées ; l'estimation de dimensions à partir d'images (aspect IV du RSQ), les techniques de calcul sans l'usage de la calculatrice, l'arrondi des nombres et la consistance des approximations qui conservent l'ordre de grandeur.
Préalablement, les élèves ont découvert expérimentalement la force d'Archimède et constaté que cette force est verticale, opposée au poids et égale au poids du volume d'eau déplacé, ($F_A=\rho_{eau}$ g V_{eau}).
Le dispositif didactique est découpé en trois étapes (voir annexes A, B et C).
Dans l'étape 1, le WE est présenté en explicitant aux élèves son objectif didactique. Puis, deux WE sont proposés : étude par groupes de deux élèves d'un premier WE et présentation par un des groupes de ce WE aux autres élèves, même déroulement pour le deuxième. Dans les deux WE, la part de RSQ est importante sous la forme d'estimation de dimensions à partir d'images, de masses à partir du bon sens et de volumes en les approximant par des formes géométriques simples.
L'étape 2 a comme objectif le transfert proche : les élèves sont invités à résoudre des problèmes semblables aux WE étudiés dans l'étape 1, mais toujours avec l'accompagnement de l'enseignant qui veille à ce que les articulations entre les différentes démarches pour résoudre le problème soient comprises et formulées. Ce n'est que lorsqu'il s'est assuré que tous les points de la résolution sont bien clarifiés, que l'enseignant va laisser

les élèves se lancer seuls dans la résolution de problèmes plus complexes.
Enfin l'étape 3 offre la possibilité de travailler sur un problème mettant en jeu une situation plus complexe, comprenant un caractère interdisciplinaire avec le cours d'histoire. Il est moins proche de la vie courante et fait appel à des estimations plus compliquées. La forte charge cognitive que ce problème génère est neutralisée par l'acquisition de confiance dans les étapes 1 et 2

4 RESULTATS

Dans une approche qualitative de ce travail nous proposons ci-après la transcription des remarques des élèves faites en classe lors des trois étapes.

Lors de l'étape 1, les élèves commentent le RSQ : *« Une façon de faire peu classique. Estimer, rechercher des infos dans une image. En mettant un peu d'ordre dans ses calculs et en évitant d'utiliser π directement on peut arriver au résultat sans même utiliser sa calculatrice. »*. Ils découvrent ainsi qu'il n'est pas nécessaire de remplacer tout de suite π par sa valeur numérique (on prendra d'ailleurs π =3 dans le calcul final) et que des valeurs approximatives, estimées sur l'image permettent déjà de bien avancer dans la résolution. Ils apprécient les liens avec les autres disciplines : « *En plus de faire des maths, un super sujet de géographie* »*,* ce qui sort les mathématiques de leur tour d'ivoire. Pour des élèves en difficulté, l'approche RSQ peut les réconcilier avec les mathématiques en leur faisant constater son utilité dans la résolution de problèmes sans que la complexité des calculs les décourage. À noter toutefois qu'ici, comme le met en évidence Steen (2004), ce ne sont pas les mathématiques abstraites – auxquelles ils devront forcément être confrontés dans la suite de leur scolarité – mais bien les compétences de numératie qui sont en jeu.
Mais c'est sans doute le WE qui joue le rôle le plus important dans la motivation des élèves. Ils sentent que l'enseignant s'est investi pour détailler son raisonnement et qu'il est là pour les aider si nécessaire : *« Le prof est présent et peut fournir davantage d'informations sur son raisonnement », « Les différentes étapes jusqu'à la solution sont écrites noir sur blanc* ». Les élèves trouvent rassurant le fait de disposer du raisonnement de l'enseignant explicité sur papier, ce qui leur permet de comprendre à leur rythme et d'éviter la surcharge cognitive (Sweller, 2011) : « *Plus besoin de copier le corrigé. Là on me demande juste de comprendre et à mon rythme* ».

Pour l'étape 2, les réactions des élèves portent essentiellement sur le transfert rendu plus facile par les deux WE étudiés précédemment : « *Ces deux problèmes sont un peu différents des deux premiers, mais la « logique » de résolution est la même* »

Pour l'étape 3, les élèves reconnaissent la difficulté du problème (voir annexe C) : « *Exercice difficile, mais on sent bien où on veut en venir* ». Cette remarque est très significative ! La charge cognitive est bien présente à la lecture de l'exercice, mais semble surmontable. Après quelques minutes un effet boule de neige se produit, ils enchainent l'estimation du volume du sous-marin, en le découpant en plusieurs parties et en exploitant la probable dimension des personnages et arrivent finalement à l'approximation de la force d'Archimède.

Ces trois étapes respectent les principes du WE. On recherche tout d'abord à créer un climat de confiance par le fait de disposer du raisonnement de l'enseignant. Puis dans l'étape 2, l'élève opère un transfert simple, qui génère un sentiment de réussite. Finalement l'étape 3 « parachute » l'élève en terre inconnue, mais il réalise que les outils développés sont adaptés à ce nouvel environnement.

En ce qui concerne le RSQ, les élèves le commentent peu. Pourtant certains élèves ont, contrairement à leurs habitudes, ajouté spontanément des remarques aux calculs du test final : « *A la vue de ce résultat, ai-je bien appréhendé le problème, ai-je suivi une fausse piste ?* » et développent un regard critique sur le résultat « *ce résultat me semble bien grand* ». Cette réaction face à un résultat qui semble saugrenu prouve que cet élève a intégré l'esprit du RSQ.

5 CONCLUSION

L'objectif de cette étude était de mettre en place une structure de travail développant le RSQ. Pour ce faire, nous avons eu recours à un outil didactique, le WE.
Bien qu'uniquement qualitatifs, les résultats sont prometteurs. L'attitude des élèves a été considérablement modifiée par ce dispositif. La différence la plus notable réside dans leur implication dans l'approche du problème : outre l'intérêt qu'ils ont manifesté face à des problèmes originaux, ils ont constaté que la calculatrice n'est pas toujours indispensable.
Au vu de ces résultats, notre perspective est de joindre une dimension quantitative à cette étude. Pour ce faire, à partir d'une séquence d'enseignement qui développe le RSQ articulé avec le WE, nous comparerons les progressions d'un groupe test qui utilisera la séquence et d'un groupe de contrôle pour lequel le RSQ sera enseigné sans l'appui du WE. L'outil d'évaluation qui sera utilisé en pré et post intervention, sera un questionnaire composé de diverses dimensions qui constituent le RSQ. De premières expérimentations semblent confirmer les effets positifs du WE pour l'apprentissage du RSQ (auteur1, auteur2, auteur3 & Roch, 2017).

SUPPLEMENTARY MATERIALS

Voir document annexe

REFERENCES

Références Web

AAAS (1989). *Project 2061: Science for all Americans*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

CDIP (2014). *HarmoS*. http://www.cdip.ch/dyn/11737.php, accès 28/09/17

CDIP (2011). *Compétences Fondamentales pour les Mathématiques. Standards nationaux de formation*.

Berne : CDIP. http://www.cdip.ch/dyn/15415.php, accès 28/09/17

CIIP/DFJC (2012). Plan d'études romand (PER) – Complément vaudois au PER : Mathématiques et Physique. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC) du Canton du Vaud (Edts.) , accès 28/09/2017.

NCTM (2014). *Statement of Beliefs.* http://www.nctm.org/beliefs.aspx, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM ed.) ; accès 28/09/2017

OCDE, Statistique Canada (2011). *La littératie, un atout pour la vie : Nouveaux résultats de l'Enquête sur la littératie et les compétences des adultes*. Éditions OCDE. http://www.statcan.gc.ca/pub/89-604-x/89-604-x2011001-fra.pdf; accès 28/09/2017

Références

Atkinson, R. K., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. W. (2000). Learning from examples: Instructional principles from the worked examples research. *Review of Educational Research*, *70*, 181–214.

Auteur1, Auteur2, Auteur3, & Roch, S. (2017). Semi quantitative reasoning (SQR) as a part of science literacy: an intervention study. Communication presented to the 12th. Conference of the European Science Education Research Association (ESERA), 21st-25th August 2017, Dublin City University, Dublin, Ireland.

Balibar, F. (2012). Les mathématiques de/dans la physique. Entretien avec Jean-Marc Lévy-Leblond. *Rue Descartes*, *74*,(2), 62-80. doi:10.3917/rdes.074.0062. http://www.cairn.info/revue-rue-descartes-2012-2-page-62.htm, accès 7.09.2017.,

Brown, J. S., Collins A. & Duguid P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, *Vol. 18*, No. 1, 32-42

Brown, N. R. & Siegler, R. S. (1993). Metrics and mappings: A framework for understanding real-world quantitative estimation. *Psychological Review, Vol 100(3)*, 511-534.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (1976). Notes from national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher*, *23*, 297-302.

Catley, K. M. & Novick, L. R. (2009), Digging deep: Exploring college students' knowledge of macroevolutionary time. *J. Res. Sci. Teach.*, *46*, 311–332.

Cheek, K. (2010). *Factors Underlying Students' Conceptions of Deep Time: An Exploratory Study*. Doctoral thesis, Durham University.

Clark, R.C., Nguyen, F., & Sweller, J. (2006). *Efficiency in learning: evidence-based guidelines to manage cognitive load*. San Francisco: Pfeiffer

Collins, A., Brown, J.S., & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing, and mathematics. In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453–493). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Crissman, J. K. (2006). *The design and utilization of effective worked examples: A meta-analysis*. Ph.D. thesis, University of Nebraska, Lincoln, NE.

Crites, T (1992). Skilled and Less Skilled Estimators' Strategies for Estimating Discrete Quantities. *The Elementary School Journal, Vol.92*, No.5. pp. 601-619

Delgado Cesar (*2013*) Navigating Deep Time: Landmarks for Time From the Big Bang to the Present. *Journal of Geoscience Education, Vol. 61*, No. 1, pp. 103-112.

Delgado, C., Stevens, S., Shin, N., Yunker, M., & Krajcik, J. (2007). *The development of students' conceptions of size*. Paper presented at the National Association for Research in Science Teaching Annual Conference, New Orleans, LA, April 2007.

Delgado, C., Stevens, S., & Shin, N. (2008). *Development of a learning progression for students' conceptions of size and scale*. Paper presented at the National Association for Research in Science Teaching Annual Conference, Baltimore, MD, April 2008.

Delgado, C. (2009). *Development of a research-based learning progression for middle school through undergraduate students' conceptual understanding of size and scale*. Dissertation. University of Michigan.

Docktor, J. L., & Mestre, J. P. (2014). Synthesis of discipline-based education research in physics. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 10*(2), 020119-1 - 020119-58.

Feynman, R. P. (1985). *The character of physical law*. Cambridge, Mass: The MIT Press.

Gauthier C. & Jobin V. (2009). *Moins c'est souvent mieux. Guide des principes d'enseignement multimédia élaborés à partir de recherches en psychologie cognitive*. Laval: Les Presses de l'Université

Hawkins, D. (1978), Critical barriers to science learning, *Outlook*, *29*, 3-23.

Hattie, A.C. (2009). *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London, New York: Routledge.

Jones M. G., Taylor A., Minogue J., Broadwell B., Wiebe E. & Carter G. (2007). *Journal of Science Education and Technology*. *Vol. 16*, No. 2, 191-202.

Jones, M. G., Tretter, T., Taylor, A., & Oppewal, T. (2008). Experienced and novice teachers' concepts of spatial scale. *International Journal of Science Education, 30*(3), 409-429.

Jones, M. G., Gardner, G. E., Taylor, A. R., Forrester, J. H. & Andre, T. (2012), Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical Thinking. *School Science and Mathematics, 112*. 171–178.

Kaiser, H. (2009) *Éléments constitutifs d'un concept pour la promotion des compétences en numératie*. Zurich : Fédération suisse pour la formation continue.

Morrison, P., & Morrison, P. (1994). *Powers of Ten*. New York: Scientific American Library.

Paulos, J. A. (1988). *Innumeracy-Mathematical illiteracy and its consequences*. New York: Hill and Wang.

Reimann, P. (1997*). Lernprozesse beim Wissenserwerb aus Beispielen: Analyse, Modellierung, Förderung* [Learning process in knowledge acquisition from examples. Analysis, modeling, enhancement]. Bern: Huber.

Renkl, A. (2005). The worked-out-example principle in multimedia learning. In R. Mayer (Ed.), *Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge: Cambridge University Press, 89-108.

Renkl, A., Atkinson, R. K., & Große, C. S. (2004). How fading worked solution steps works – a cognitive load perspective. *Instructional Science, 32*, 59–82.

Renkl, A., Atkinson, R.K., Maier, U.H. & Staley, R. (2002). From example study to problem solving: Smooth transitions help learning. *Journal of Experimental Education 70*: 293–315.

Renkl, A., Hilbert, T., & Schworm, S. (2009). Example-based learning in heuristic domains: A cognitive load theory account. *Educational Psychology Review, 21*(1), 67-78.

Reys R. t E., Rybolt J. F., Bestgen B. J. and Wyatt J. W. (1982). *Journal for Research in Mathematics Education*. *Vol. 13*, No. 3, 183-201

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal*, *Vol 84*(5), 547-557.

Siegel A. W., Goldsmith L. T. & Madson C. R. (1982). *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 13, No. 3, 211-232

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp. 197–212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Steen, L. A. (2004). "Everything I Needed to Know about Averages. . . I Learned in College." *Peer Review* 6 (4): 4–8.

Swartz, C. (2003). *Back of the Envelope Physics*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Sweller, J. (2006). The worked example effect and human cognition. *Learning and Instruction 16*, 165-169.

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory: Explorations in the learning sciences, instructional systems and performance technologies*. New York, NY: Springer.

Sweller, J., Van Merrienboer, J. J., & Paas, F. G. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational psychology review*, *10*(3), 251-296.

Trend, R. (2009). The power of deep time in geoscience education: linking 'interest', 'threshold concepts' and 'self-determination theory'. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Geologia, 54* (1), 7-12.

Tretter, T. R., Jones, M. G., Andre, T., Negishi, A., & Minogue, J. (2006). Conceptual boundaries and distances: Students' and experts' concepts of the scale of scientific phenomena. *Journal of Research in Science Teaching,43* (3), 282-319.

Tretter, T. R., Jones, M. G. and Minogue, J. (2006), Accuracy of scale conceptions in science: Mental manoeuvrings across many orders of spatial magnitude. *J. Res. Sci. Teach., 43*, 1061–1085.

Van Gog, T., Paas, F., & Van Merriënboer, J. J. G. (2004). Process-oriented worked examples: Improving transfer performance through enhanced understanding. *Instructional Science, 32*, 83-98

VanLehn, K. (1996). Cognitive skill acquisition. *Annual Review of Psychology*, *47*, 513- 539.

Van Merriënboer, J. (1997). *Training Complex Cognitive Skills: a Four-Component Instructional Design Model for Technical Training*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications

Van Merriënboer, J.J.G., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent development and future directions. *Educational Psychology Review, 17*(2), 147–176.

Von Baeyer, H. C., (2001). *The Fermi Solution: Essays on Science*. New York: Dover

Weinstein, L. & Adam, J. A. (2008). *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton: Princeton University Press.

Wigner, E. P. (1960), 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Physical Sciences'. In T. L. Saaty and F. J. Wey (eds.), *The Spirit and Uses of the Mathematical Sciences*, New York: McGraw-Hill, 123-140.

Annexe (Matériel supplémentaire)

Annexe A
Worked Example 1

La **monnaie de pierre**, en yap *Rai*, est un système monétaire propre à l'île de Yap, située en Micronésie.
Les pierres de Yap sont de grosses pierres rondes semblables à des meules, comportant un trou en leur milieu, et dont la taille peut aller de 0,8 à 4 mètres de diamètre. Elles sont taillées dans un matériau natif composé d'aragonite de densité 3. Répertoriées, elles sont au nombre de 6 600 exemplaires et uniquement destinées aux gros achats. Pour le reste, on utilise des dollars.
Ce système empêche l'inflation car la quantité de monnaie est limitée et le vol quasi impossible. Brisées, ces pierres n'ont plus aucune valeur aux yeux des autochtones. Les habitants de Yap, pour ne pas risquer de les casser pendant un transport périlleux, laissent les plus lourdes au même endroit et notent mentalement à qui la pierre appartient.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Monnaie de pierre

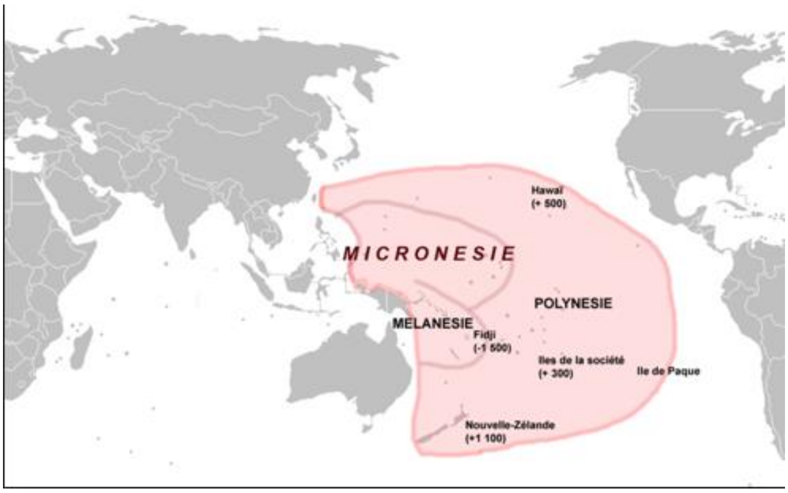


Figure 1 : Archipel de Micronésie, © Christophe Cagé / Wikimedia Commons, CC-BY-SA3.0

Figure 2 : http://www.flickr.com/photos/80198568@N00/298034022

A l'aide des informations ci-dessus, pourrais-tu estimer la masse de la pièce située à côté du personnage ?

Les étapes menant à la solution :

On peut imaginer que cet habitant à une taille d'environ 1.7 m, ce qui nous fait environ 2.4 m pour le diamètre de cette pièce, soit 1.2 m de rayon.
Le petit cercle à l'intérieur a un rayon d'environ 30 cm (moitié de l'avant-bras de l'homme).
Quant à l'épaisseur, environ une main, soit environ 15 cm.
La donnée nous indique une densité de 3. Soit 3 fois la masse volumique de l'eau, environ 3000 kg/m^3.
On a toutes les informations pour démarrer les calculs.

Pour calculer la surface de cet objet, il me suffit de soustraire à l'aire du grand disque l'aire du petit.
Surface du disque = $\pi \times r^2$ (r = rayon)
Surface de l'objet = $\pi \times (1.2\ m)^2 - \pi \times (0{,}3\ m)^2 = 1.35\pi \mathrm{m}^2$

Je conserve le symbole « Pi » jusqu'à la fin du calcul ! Cela va m'éviter de véhiculer inutilement des nombres décimaux, si ennuyeux !
Il me reste à calculer le volume, soit multiplier $1.35\pi \mathrm{m}^2$ par l'épaisseur de 0.15 m.
J'obtiens ainsi $1.35\pi m^2 \cdot 0.15 m = 135 \cdot 10^{-2}\pi m^2 \cdot 15 \cdot 10^{-2} m = 2025 \cdot 10^{-4}\pi m^3$
Il me reste plus qu'à calculer la masse.
Pour cela je sais que : $\rho = \frac{m}{v}$ donc $m = \rho \cdot v$
m = $3000 kg/m^3 \times 0.2025\,\pi\, m^3 = 3 \times 10^3 \times 2025 \times 10^{-4} \times \pi \times kg = 607.5\pi kg \approx$ 2000kg

Le transport de ces pièces, d'une ile à une autre, par l'intermédiaire de bateaux de fortunes est « monnaie » courante. Etant donné le côté précaire de ces embarcations, il arrive très souvent que le chargement se retrouve, malheureusement au fond de l'eau.
Pourrais-tu calculer la force nécessaire minimale pour remonter, la pièce de l'exercice précédent, à la surface de l'eau ?

Les étapes menant à la solution:

Le poids (P) de notre pièce est d'environ 20000 N (P = mg). Etant plongée dans de l'eau, elle subit une force d'Archimède qui est verticale et dirigée vers le haut (super, elle nous sera utile pour nous aider à remonter la pierre). Pour connaître la force nécessaire à fournir il nous suffit alors de soustraire au poids de la pièce la force d'Archimède.

$$20000N - 1000 \times 10 \times 0.2025\pi N = 20000N - 2025\pi N \approx 20000N - 6400N = 13600N$$

Worked Example 2

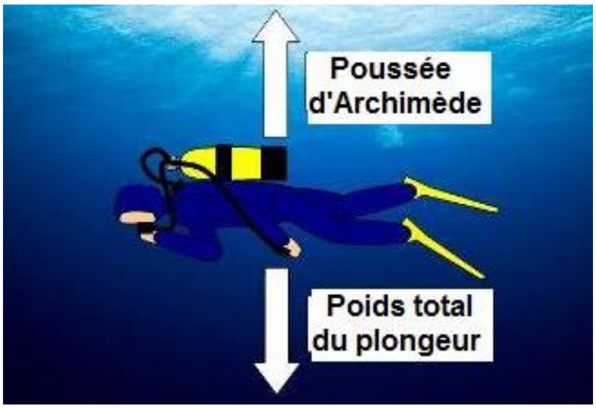
La Mer Morte est un lac d'eau salée situé au Moyen-Orient, s'étendant sur une surface approximative de 810 km^2. Il y a 40 000 ans environ, la baisse de la pluviométrie a entraîné, en raison d'une très forte évaporation, une régression du lac et une augmentation constante de sa salinité (environ 25% de sel et une masse volumique d'environ 1330 kg/m^3). Riches en minéraux, les eaux de la Mer Morte sont réputées pour soigner le psoriasis et les rhumatismes, Les bienfaits de la mer Morte ont été découverts à l'époque d'Hérode le Grand, il y a plus de 2 000 ans.

Peux-tu montrer par le calcul pourquoi la femme ci-dessous flotte tranquillement à la surface de la Mer Morte.

Figure 1 : femme flottant à la surface de la Mer Morte, Lac d'eau salée situé au Moyen-Orient http://www.le-redacteur-web.fr/la-mer-morte-des-bienfaits-et-des-cosmetiques/

Les étapes menant à la solution:

Plusieurs situations peuvent se présenter selon l'intensité de la poussée d'Archimède et le poids de cette femme.
Si le poids est supérieur à la poussée, et bien, elle va couler.
Si il y a une égalité entre les deux forces, la femme va stagner entre deux eaux. Voir figure 2 ci-dessous.



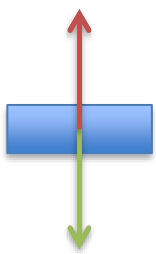


Figure 2 : image d'un plongeur stagnant (http://www.plongee-evolution.com/Comprendre.php) avec un schéma respectant l'origine des deux forces au centre de gravité du plongeur

Enfin si la poussée est supérieure au poids, alors la femme va remonter jusqu'à ce qu'elle flotte en pénétrant plus ou moins dans la mer jusqu'à ce que F_A= Poids (voir figure 3)

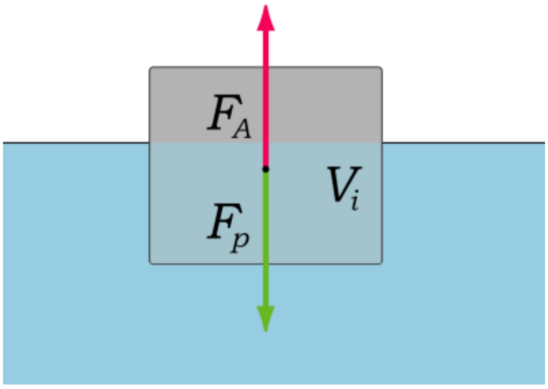


Figure 3 : http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Principio_di_Archimede_galleggiamento.png

Pour résumer, la figure 4 illustre les trois situations décrites ci-dessus.

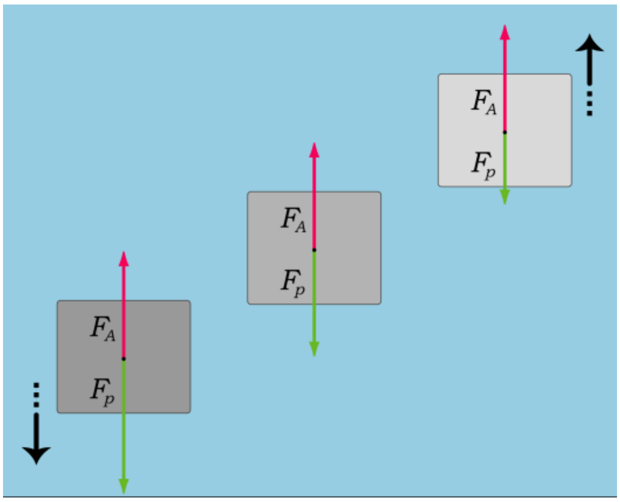


Figure 4 : http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Principio_di_Archimede_spinta_e_peso.png

L'idée est de comparer la force d'Archimède au poids de la jeune femme si celle-ci est dans un premier temps complètement immergée suite à un petit plongeon pour s'introduire en mer.
On sait que le poids = mg
Disons que cette jeune a une masse de 50 kg, ce qui nous fait donc un poids de 500N.
Pour calculer la force d'Archimède, il va falloir tout d'abord estimer le volume de cette jeune femme. Considérons là comme un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont environ : 15 cm (largeur des deux pieds), 30 cm (longueur des pieds) et 170 cm (son hauteur).
Soit un volume d'environ (simple multiplication des trois grandeurs estimées pour obtenir le volume du parallépipède rectangle) :   75000 cm3 = 0.075m3.
Nous avons donc une $F_A = 1300\,\mathrm{kg}/m^3 \cdot 10 \cdot 0.075m^3 \approx$ 1000N
La réponse est évidente, on a une force d'Archimède deux fois supérieur au poids. On se retrouve ainsi dans la troisième situation.

Annexe B
Problème 1 : Pierre prétend que la force à exercer pour retirer une pièce de monnaie de 5 francs tombée dans un becher contenant de l'huile sera plus faible que celle à exercer pour l'extraire d'un becher qui contiendrait de l'eau. A-t-il raison ?

Problème 2 : Est-ce que la bouteille, qui est complétement remplie d'eau, de la figure 1 peut flotter dans un grand bassin ?

Figure 1 : http://sipwell.com

Annexe C
Problème

Le sous-marin de la figure 1, est un des membres des célèbres « loups gris » ou « U-Boot » de la seconde guerre mondiale. Ils étaient réputés pour naviguer en meute et leur mission était de détruire les navires alliés en Méditerranée. La légende prétend même qu'ils auraient coulé plus de deux cents navires et avaient la réputation d'être invincibles ! Construit en Nickel (matériau qui ne rouille pas et qui résiste à la pression) leur masse avoisinait les 10^5kg (ballast vide).

-Quelle est la condition pour que ce « loup gris » puisse rester en surface, position idéale pour scruter l'horizon ? Dans le dessin ci-dessous, si les ballasts sont vides, le loup gris peut-il rester en surface ? Justifie ta réponse par un calcul.
Quelle quantité d'eau **minimale** est-elle nécessaire à introduire dans les ballasts pour lui permettre d'aller rejoindre les abysses et ainsi de passer inaperçu ?

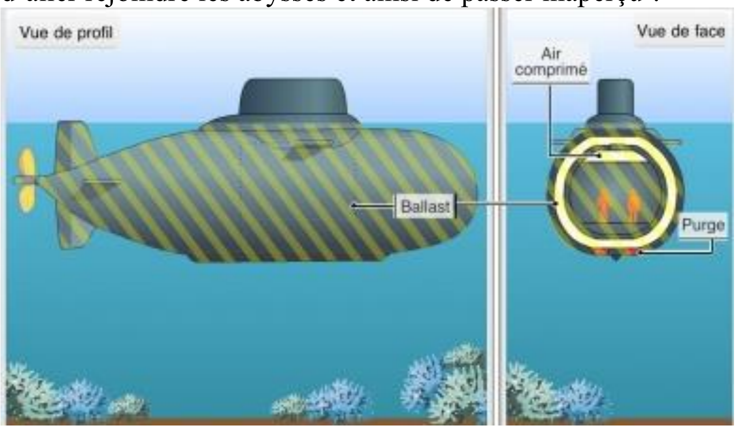


Figure 1 : http://francaiseapps.fr/iphone-ipad/education/sous-marin-bdkehgh.html

Annexe D
Difficultés techniques rencontrées dans une classe de 11ème année HARMOS, Voie Prégymnysiale (VP), dernière année du secondaire 1, élèves de 14-15 ans.

- Donner l'ordre de grandeur en mètre des longueurs suivantes :

- 0,000 083 µm = ?

Figure 1: la non-reconnaissance du préfixe „micro" empêche cet élève de pouvoir placer 0.000083 sur un tableau de transformation d'unités.

- Une citerne peut contenir $3.5 \cdot 10^6$ litres d'eau. Quel est le volume de la citerne en m^3 ?

On ne peut pas savoir : 1 litres = ? m^3

Figure 2: l'élève ne connait pas le lien existant entre une unité de capacité et de volume.

Calcule et donne le résultat en écriture décimale puis en notation scientifique :

$$J = \frac{4 \times 10^6 \times 3,3 \times 10^{-7}}{6 \times 10^3} \qquad K = 153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$$

$$J = \frac{4 \cdot 3,3 \cdot 10^{-1}}{6 \cdot 10^3} = \frac{13,2 \cdot 10^{-4}}{6} = 2,2 \cdot 10^{-4} = 22 \cdot 10^{-5}$$

$$K = 153 + 32 \cdot 10^{-4-3} - 16 \cdot 10^{-5} = 185 - 16 \cdot 10^{-7-5} = 169 \cdot 10^{-12} = 169 \cdot 10^{-10}$$

Figure 3: l'élève effectue un simple transfert de J en K de propriétés utilisées sur les puissances de dix sans différencier un produit d'une somme.